

MÉMOIRE

SUR

LE RÉGLAGE

DES CHRONOMÈTRES ET DES MONTRES

DANS

LES POSITIONS VERTICALES ET INCLINÉES

PAR

M. PHILLIPS,

Ingenieur des mines.

PARIS.

DUNOD, ÉDITEUR,

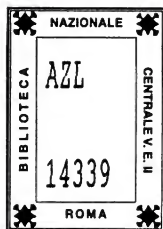
SUCCESSEUR DE V^{or} DALMONT,

Précédemment Carilian-Gœury et Victor Dalmont,

LIBRAIRE DES CORPS IMPÉRIAUX DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES,

Quai des Augustins, n^o 49.

1866



AZ L14339

Paris. — Imprimé par E. TROUX et C^e, 26, rue Racine.

L14339

MÉMOIRE
SUR
LE RÉGLAGE
DES CHRONOMÈTRES ET DES MONTRES
DANS
LES POSITIONS VERTICALES ET INCLINÉES.

Le réglage des chronomètres et des montres dans les positions verticales et inclinées, complément nécessaire du réglage dans l'horizontale, est une opération délicate, essentielle pour tous les appareils qui servent à mesurer le temps; importante pour les chronomètres destinés à la marine, elle est surtout de première nécessité pour les chronomètres portatifs qui doivent marcher également bien dans toutes les positions. Or, dès que le balancier a son centre de gravité, si peu que ce soit en dehors de l'axe pour ainsi dire mathématique autour duquel il oscille, son poids intervient, et la durée de ses vibrations n'est plus celle due uniquement à l'action du spiral. Il n'est pas rare de voir des chronomètres, avant que cette influence ait été corrigée, présenter alors, suivant l'orientation des heures du cadran dans le plan de celui-ci, des écarts de marche allant à quelques centaines de secondes par vingt-quatre heures.

Les constructeurs, qui procèdent à cet égard par tâtonnements, sont arrivés, dans la pratique, à une règle qui consiste à ôter du poids du balancier du côté qui, placé vers le bas, donne de l'avance, ou, ce qui revient au même, à ajouter du poids du côté opposé. Cette règle s'applique seulement pour des arcs de balancier d'une amplitude modérée. Lorsque ces arcs deviennent très-grands, ainsi que

cela a lieu dans certains chronomètres anglais, par exemple, la règle doit être appliquée, mais en sens inverse. Tels sont les résultats auxquels on a été conduit par l'expérience et par l'observation. Il était intéressant de soumettre au calcul l'étude de ces phénomènes, qui ont pour la pratique une très-grande importance, et de tâcher d'en déduire les lois. C'est ce que j'ai fait dans le travail suivant, qui offre une application intéressante du principe de la variation des constantes arbitraires. Je dirai de suite que la théorie, d'accord avec l'observation, fournit précisément la règle pratique à laquelle ont été conduits les constructeurs et fait connaître de nouveaux faits importants pour les applications.

Cette recherche offrait tout d'abord la difficulté suivante : en lui appliquant les méthodes ordinaires de la dynamique, et particulièrement celles que l'on emploie pour obtenir par des approximations successives le temps des oscillations du pendule, on se trouve immédiatement arrêté par l'impossibilité de partir d'une série toujours convergente. De là l'idée de recourir au principe de la variation des constantes arbitraires, si fécond dans ses applications, principalement à la mécanique céleste, et d'un usage commode dès qu'il s'agit d'évaluer de petites perturbations.

Je suppose naturellement que l'isochronisme du spiral ait été préalablement obtenu et que, dans la position horizontale, la marche soit uniforme pour toutes les amplitudes des vibrations du balancier. Soit O le centre de rotation dans la position verticale ; supposons que, dans l'état naturel du spiral et du balancier, G soit le centre de gravité de ce dernier, et appelons ϕ l'angle GOV formé alors par OG avec la verticale OV dirigée de haut en bas en partant du point O , et soit λ l'excentricité OG .

Appelons p le poids du balancier et A son moment d'inertie. De ce que l'isochronisme du spiral est supposé déjà obtenu, on peut considérer le moment de son action sur

le balancier comme étant toujours proportionnel à l'angle d'écartement de celui-ci et représenté par kx , k étant une constante et x cet angle d'écartement. On a donc à chaque instant

$$(1) \quad \Lambda \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - p\lambda \sin(x + \epsilon).$$

On tire de là, en appelant x_0 la valeur de x répondant à une des limites de l'excursion,

$$(2) \quad \Lambda \frac{d^2 x}{dt^2} = k(x_0^2 - x^2) + 2p\lambda [\cos(x + \epsilon) - \cos(x_0 + \epsilon)].$$

La valeur de x répondant à l'autre limite de l'excursion n'est pas rigoureusement égale à $-x_0$; elle en diffère très-peu, mais il y a une différence. Appelons x_1 cette valeur de x ; on tire de l'équation (2)

$$x_0^2 - x_1^2 + \frac{2p\lambda}{k} [\cos \epsilon (\cos x_1 - \cos x_0) + \sin \epsilon (\sin x_0 - \sin x_1)] = 0.$$

En faisant

$$x_1 = -x_0 + \delta,$$

et se fondant sur ce que δ est une très-petite quantité, on obtient

$$(5) \quad x_1 = -x_0 - \frac{2p\lambda}{k} \sin \epsilon \frac{\sin x_0}{x_0}.$$

Supposons que le sens des x positifs ait été pris dans un sens tel, que ϵ soit compris entre 0 et π , et supposons de plus que x_0 réponde à la limite de x quand cet angle est > 0 . La formule (5) conduit alors aux conséquences suivantes :

1° Si $x_0 < \pi$, on aura x_1 plus grand que x_0 en valeur absolue, c'est-à-dire que le balancier s'éloignera plus de la position qui répond à la non-déformation du spiral du côté opposé de l'angle ϵ .

2° Si $x_0 = \pi$, ou si le balancier fait des arcs d'un tour,

il s'écartera également, de part et d'autre, de la position initiale.

5° Si $\alpha_0 > \pi$, on aura α_1 plus petit que α_0 en valeur absolue, et le balancier ira moins loin du côté opposé à l'angle ℓ que de ce côté.

Occupons-nous maintenant d'obtenir la solution de la question, qui est la durée des vibrations du balancier. Mais on peut voir d'abord la difficulté qui s'oppose à l'emploi d'un développement en série. En effet, on tire de l'équation (2)

$$(4) \quad dt = \sqrt{\frac{\Lambda}{k}} \frac{dx}{\sqrt{x_0^2 - x^2}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2p\lambda}{k} \left[\frac{\cos(x + \ell) - \cos(\alpha_0 + \ell)}{\alpha_0^2 - x^2} \right]}}.$$

Or, si l'on voulait, en suivant la méthode usitée dans la théorie du pendule pour les approximations successives, développer

$$\left\{ 1 + \frac{2p\lambda}{k} \left[\frac{\cos(x + \ell) - \cos(\alpha_0 + \ell)}{\alpha_0^2 - x^2} \right] \right\}^{-\frac{1}{2}},$$

en se fondant sur la petitesse extrême du facteur $\frac{2p\lambda}{k}$, on se trouverait arrêté de suite par la considération que l'autre facteur $\frac{\cos(x + \ell) - \cos(\alpha_0 + \ell)}{\alpha_0^2 - x^2}$ devient infiniment grand quand x s'approche infiniment de $-\alpha_0$, excepté dans le cas particulier de $\ell = 0$ ou de $\ell = \pi$.

Voici maintenant l'exposé de la méthode suivie :

Si la perturbation dont il s'agit n'existait pas, le spiral étant isochrone, l'équation à résoudre serait

$$(5) \quad \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{k}{\Lambda} \alpha,$$

dont l'intégrale est

$$(6) \quad t = \sqrt{\frac{\Lambda}{k}} \arcsin \frac{\alpha}{\alpha_0} + \theta.$$

α_0 étant la demi-amplitude des oscillations, et θ le temps pour $\alpha = 0$.

On a aussi

$$(7) \quad \alpha = \alpha_0 \sin \sqrt{\frac{k}{\Lambda}} (t - \theta).$$

et

$$(8) \quad \frac{d\alpha}{dt} = \alpha_0 \sqrt{\frac{k}{\Lambda}} \cos \sqrt{\frac{k}{\Lambda}} (t - \theta).$$

Je vais maintenant considérer dans ces formules α_0 et θ comme deux fonctions variables, de telle sorte que les expressions (6) ou (7) satisfassent, non plus à l'équation (5), mais à l'équation (1) ou à

$$(9) \quad \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{k}{\Lambda} \alpha - \frac{p\lambda}{\Lambda} \sin(\alpha + \epsilon).$$

Comme il y a deux fonctions indéterminées, α_0 et θ , et une seule condition (9), j'imposerai comme seconde condition que l'équation (8) soit aussi satisfaite, c'est-à-dire que $\frac{d\alpha}{dt}$ ait la même forme que si α_0 et θ étaient des constantes.

En convenant de désigner par le signe $\left(\frac{d}{dt}\right)$ toute dérivée partielle, la seconde condition revient à

$$(10) \quad \frac{d\alpha}{dt} = \left(\frac{d\alpha}{dt}\right),$$

ou à

$$(11) \quad \left(\frac{d\alpha}{d\alpha_0}\right) \frac{d\alpha_0}{dt} + \left(\frac{d\alpha}{d\theta}\right) \frac{d\theta}{dt} = 0,$$

et la première condition à

$$\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right) + \left(\frac{d^2\alpha}{dt d\alpha_0}\right) \frac{d\alpha_0}{dt} + \left(\frac{d^2\alpha}{dt d\theta}\right) \frac{d\theta}{dt} = -\frac{k}{\Lambda} \alpha - \frac{p\lambda}{\Lambda} \sin(\alpha + \epsilon)$$

Mais, à cause de l'équation (5), on a identiquement

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) = -\frac{k}{\Lambda} x.$$

Donc, la première condition peut s'écrire comme il suit :

$$(12) \quad \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right) \frac{d\alpha_0}{dt} + \left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\right) \frac{d\theta}{dt} = -\frac{p\lambda}{\Lambda} \sin(\alpha + \theta).$$

Les équations (11) et (12) vont servir à déterminer α_0 et θ lorsque les dérivées partielles auront été remplacées par leurs valeurs déduites de l'équation (7). Après avoir fait ces substitutions, on obtient

$$d\theta = -\frac{1}{\alpha_0} \frac{p\lambda}{k} \sin \sqrt{\frac{k}{\Lambda}} (t - \theta) \sin(\alpha + \theta) dt$$

et

$$d\alpha_0 = -\frac{p\lambda}{k} \sqrt{\frac{k}{\Lambda}} \cos \sqrt{\frac{k}{\Lambda}} (t - \theta) \sin(\alpha + \theta) dt,$$

ou, en développant $\sin(\alpha + \theta)$ et y remplaçant α par sa valeur, équation (7), on a

$$(13) \quad d\theta = -\frac{1}{\alpha_0} \frac{p\lambda}{k} \left\{ \cos \theta \sin \left[\alpha_0 \sin \sqrt{\frac{k}{\Lambda}} (t - \theta) \right] + \right. \\ \left. + \sin \theta \cos \left[\alpha_0 \sin \sqrt{\frac{k}{\Lambda}} (t - \theta) \right] \right\} \sin \sqrt{\frac{k}{\Lambda}} (t - \theta) dt$$

et

$$(14) \quad d\alpha_0 = -\frac{p\lambda}{k} \sqrt{\frac{k}{\Lambda}} \left\{ \cos \theta \sin \left[\alpha_0 \sin \sqrt{\frac{k}{\Lambda}} (t - \theta) \right] + \right. \\ \left. + \sin \theta \cos \left[\alpha_0 \sin \sqrt{\frac{k}{\Lambda}} (t - \theta) \right] \right\} \cos \sqrt{\frac{k}{\Lambda}} (t - \theta) dt.$$

Ces deux équations déterminent θ et α_0 par de simples quadratures, car on sait, d'après les principes de la mé-

thode de la variation des constantes arbitraires, que, dans les seconds membres des équations (13) et (14), α_0 et θ peuvent y être considérés comme des constantes.

A cause de l'équation (10), la vitesse angulaire est toujours donnée par l'équation (8), de sorte que les limites des oscillations, répondant à $\frac{dx}{dt} = 0$, auront lieu à des époques données par

$$(15) \quad \sqrt{\frac{k}{A}}(t - \theta) = (2i + 1) \frac{\pi}{2},$$

i étant un nombre entier quelconque, ou

$$(16) \quad t = (2i + 1) \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{A}{k}} + \theta,$$

et, en appelant θ' la différence entre deux valeurs successives de θ répondant à deux valeurs consécutives de i ou aux deux limites d'une oscillation, on aura, pour le temps T d'une oscillation simple,

$$(17) \quad T = \pi \sqrt{\frac{A}{k}} + \theta'.$$

Il reste maintenant à obtenir la valeur de θ' , et pour cela il faut commencer par intégrer l'équation (15).

A cet effet, remarquons que $\sin \left[\alpha_0 \sin \sqrt{\frac{k}{A}}(t - \theta) \right]$ peut toujours se développer en une série convergente suivant les puissances de degré impair de $\alpha_0 \sin \sqrt{\frac{k}{A}}(t - \theta)$, et comme il y a dans l'équation (13), en dehors du signe $\left. \vphantom{\int} \right\}$, le facteur $\sin \sqrt{\frac{k}{A}}(t - \theta)$, on a à intégrer une série infinie de termes, tels que

$$(18) \quad \pm \frac{\alpha_0^{2r+1}}{1.2.3... (2r+1)} \sin^{2r+1} \sqrt{\frac{k}{A}}(t - \theta) dt,$$

r ayant toutes les valeurs entières positives depuis et y compris zéro jusqu'à l'infini, et les termes étant alternativement positifs et négatifs, selon que r est pair ou impair.

Maintenant, $\sin^{2r+2} \sqrt{\frac{k}{A}} (t-\theta)$ peut se développer suivant

les cosinus des multiples pairs de l'arc $\sqrt{\frac{k}{A}} (t-\theta)$, plus un terme constant. Or tous ces termes en cosinus doivent être négligés. En effet, en les intégrant ils se transforment en sinus de ces mêmes multiples; mais d'après l'équation (15) ces derniers, pour les limites de l'intégration, sont des multiples de π , de sorte que leurs sinus sont nuls, ce qui fait évanouir le résultat de ces intégrations. Il y a seulement lieu de tenir compte, pour chaque valeur de r , du terme constant correspondant. Celui-ci, multiplié par dt et intégré entre les limites indiquées, donne le même facteur constant multiplié par T , que l'on peut prendre ici égal à $\pi \sqrt{\frac{A}{k}}$, et l'on a définitivement, pour ce seul terme provenant de l'équation (18),

$$(19) \quad \pm \frac{\alpha_0^{2r+1}}{2^{2r+1} (r+1) (1.2.3\dots r)^2} \pi \sqrt{\frac{A}{k}},$$

ces termes étant alternativement positifs et négatifs en commençant par le signe +.

Quant à la partie du second membre de l'équation (15) qui résulterait du développement de $\cos \left[\alpha_0 \sin \sqrt{\frac{k}{A}} (t-\theta) \right]$, on peut en faire abstraction. En effet, ce développement ne contiendrait que des puissances de degré pair de $\sin \sqrt{\frac{k}{A}} (t-\theta)$, lesquelles, multipliées par ce même sinus, qui est en dehors du signe $\left\{ \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\}$, donneraient les puissances

de degré impair du sinus de cet arc. Soit

$$\frac{\alpha_0^{2r}}{1.2.3 \dots (2r)} \sin^{2r+1} \sqrt{\frac{k}{\Lambda}} (t - t_0) dt$$

l'un de ces termes.

On sait que $\sin^{2r+1} \sqrt{\frac{k}{\Lambda}} (t - t_0)$ est développable suivant les sinus des multiples impairs de $\sqrt{\frac{k}{\Lambda}} (t - t_0)$ et qu'il n'y a pas de terme constant. Or l'intégration transformerait ces sinus en cosinus des multiples impairs de ce même arc, et, d'après l'équation (15), ces cosinus s'évanouiraient tous aux deux limites de l'intégration.

En définitive, en rétablissant le facteur $-\frac{1}{\alpha_0} \frac{p\lambda}{k}$, qui se trouve en tête du second membre de l'équation (15), on a

$$(20) \quad \theta' = -\pi \sqrt{\frac{\Lambda}{k}} \cdot \frac{p\lambda}{k} \cos \theta \sum \pm \frac{\alpha_0^{2r}}{2^{2r+1} (r+1) (1.2.3 \dots r)^2},$$

les signes des termes compris dans $\sum$ étant alternativement + et -, en commençant par +, qui répond à $r=0$, et, pour cette valeur zéro de r , il faut remplacer $(1.2.3 \dots r)^2$ par 1.

On a alors, pour le temps réel T de l'oscillation simple,

$$(21) \quad T = \pi \sqrt{\frac{\Lambda}{k}} \left[1 - \frac{p\lambda}{k} \cos \theta \sum \mp \frac{\alpha_0^{2r}}{2^{2r+1} (r+1) (1.2.3 \dots r)^2} \right],$$

ou, en formant le développement qui est indiqué sous le signe $\sum$,

$$(22) \quad T = \pi \sqrt{\frac{\Lambda}{k}} \left\{ 1 - \frac{p\lambda}{k} \cos \theta \left[\frac{1}{2} - \frac{\alpha_0^2}{2^3 2 \cdot (1)^2} + \frac{\alpha_0^4}{2^5 3 \cdot (1 \cdot 2)^2} - \frac{\alpha_0^6}{2^7 4 \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3)^2} + \frac{\alpha_0^8}{2^9 5 \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4)^2} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\alpha_0^{10}}{2^{11} 6 \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5)^2} + \frac{\alpha_0^{12}}{2^{13} 7 \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6)^2} - \dots \right] \right\}$$

Cette formule montre une concordance parfaite entre les résultats de la théorie et les règles expérimentales indiquées au commencement de ce travail.

En effet, supposons d'abord que l'angle α_0 soit au-dessous de la valeur nécessaire pour que la série

$$\left[\frac{1}{2} - \frac{\alpha_0^2}{2^3 \cdot 2 \cdot (1^2)} + \dots \right] \text{ commence à devenir négative.}$$

Alors, si $\theta < \frac{\pi}{2}$ ou si $\cos \theta > 0$, c'est-à-dire si le centre du balancier, au repos, se trouve au-dessous du centre de rotation, la formule (22) montre qu'en pareil cas il y aura une légère accélération du chronomètre par rapport à la marche normale correspondant à une durée d'oscillation $\pi \sqrt{\frac{A}{k}}$.

Au contraire, si $\theta > \frac{\pi}{2}$ ou $\cos \theta < 0$, par la même raison il y aura un léger retard dans la marche, et dont la valeur sera encore donnée par la formule (22).

Pour centrer dans ces deux cas le balancier, il faudra donc toujours appliquer la règle indiquée au commencement.

On voit de plus que si $\theta = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire si le balancier a son centre déplacé sur l'horizontale, la marche du chronomètre n'en est pas affectée et est la marche normale elle-même.

J'ai supposé que l'angle α_0 avait une valeur au-dessous de celle pour laquelle la parenthèse $\left[\frac{1}{2} - \frac{\alpha_0^2}{2^3 \cdot 2 \cdot (1^2)} + \dots \right]$ commence à devenir négative. Il est intéressant de connaître cette valeur, c'est-à-dire celle qui annule cette parenthèse. Or on trouve qu'elle est comprise entre 5,85 et 5,84, qui donnent pour cette série, le premier nombre un résultat positif et le second un résultat négatif. Le premier répond

à un angle de $219^{\circ}27'$ et le second à un angle de $220^{\circ}1'$. Leur moyenne est de $219^{\circ}44'$. On peut donc dire que c'est pour une amplitude d'oscillation de $459^{\circ}28'$, ou, approximativement, de 440 degrés, que l'excentricité du balancier ne trouble en aucune façon la durée des oscillations, quelle que soit l'orientation du cadran.

Il était intéressant de vérifier ce résultat de la théorie par l'expérience. Or, les observations ont toujours confirmé les déductions du calcul. Voici, à cet égard, un certain nombre d'exemples. Les expériences ont été faites sur des chronomètres et suivies avec soin. On ne s'était pas donné la peine de corriger l'influence de l'excentricité du balancier d'après la règle déjà indiquée. Et même, dans l'expérience n° III, on avait donné exprès une forte excentricité au balancier.

	NUMÉROS des expériences.	AMPLITUDE des oscillations du balancier.	ÉCART MAXIMUM de la marche diurne selon l'orientation du cadran dans le plan vertical.
		degrés.	Secondes.
(I)	1°	270	234,0
	2°	540	3,0
	3°	580	32,2
(II) Autre appareil.	1°	270	361,0
	2°	540	12,0
	3°	555	73,0
(III) Autre appareil.	1°	260	532,8
	2°	540	82,0
	3°	570	165,0
	4°	560	185,0
(IV) Autre appareil.	1°	360	138,1
	2°	540	6,3
	3°	575	57,3
(V) Autre appareil.	1°	195	122,7
	2°	540	3,3
	3°	530	122,5

On voit, par le tableau ci-dessus, combien l'expérience vient confirmer la théorie. Et encore faut-il tenir compte de ce que, la fusée étant ordinairement construite pour pro-

duire un angle constant très-inférieur à 440 degrés, dans la position verticale, cette dernière amplitude ne laisse pas que de s'écarter de cet angle d'une manière sensible, pendant le cours des observations, malgré le soin qu'on prend de remonter souvent l'armure du ressort.

Outre les diverses conséquences pratiques de la théorie précédente, cette propriété de l'arc de 440 degrés est importante à connaître pour les constructeurs. En effet, beaucoup de chronomètres de poche ont un balancier qui fait naturellement, dans la position verticale, des arcs de 440 à 450 degrés. Dès lors, si l'on s'en rapportait à la marche du chronomètre, pour cette inclinaison, on le croirait réglé et il ne le serait pas, parce que, pour une autre inclinaison, l'amplitude des vibrations du balancier ne serait plus celle qui donnerait une marche régulière, si l'on n'avait pas convenablement centré le balancier.

Extrait des Annales des mines, tome ix, 1866.

Paris. — Imprimé par E. TUNOT et C^e, rue Racine, 26.

0040287h8